

**29.** Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AB\Gamma$  έχουν κοινή γωνία  $A$ , άρα:

$$\frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{AB \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (1)$$

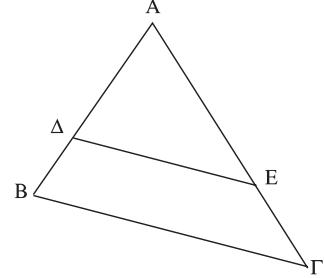
Όμοια τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $ABE$ , άρα:

$$\frac{(A\Delta E)}{(ABE)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot AE} = \frac{A\Delta}{AB} \quad (2)$$

Όμως από το θεώρημα του Θαλή:  $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$  (3)  $(\Delta E // B\Gamma)$

$$\text{Από (1), (2), (3) έχουμε } \frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{(A\Delta E)}{(ABE)}.$$

$$\text{Άρα } (ABE)^2 = (AB\Gamma)(A\Delta E).$$



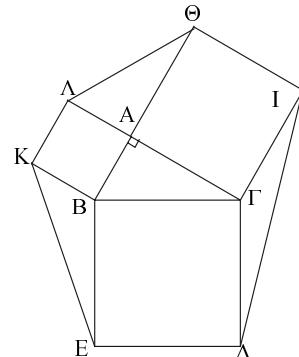
**30. α)** Γωνία  $KBE +$  γωνία  $AB\Gamma = 180^\circ$ .

$$\text{Άρα } \frac{(KBE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\alpha} = 1$$

$$(AB = KB = \gamma, B\Gamma = BE = \alpha).$$

$$\text{Άρα } (KBE) = (AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma}{2} \quad (A\Gamma = \gamma).$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } (\Delta\Gamma I) = \frac{\beta\gamma}{2}, \quad (\Lambda A\Theta) = \frac{\beta\gamma}{2}$$



$$\beta) (\Delta E K \Lambda \Theta I) = (AB\Gamma) + (KBA\Lambda) + (A\Gamma I \Theta) + (B\Gamma \Delta E) + (KBE) + (\Delta\Gamma I) +$$

$$(\Lambda A \Theta) = \frac{\beta\gamma}{2} + \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma =$$

$$\alpha^2 + (\beta + \gamma)^2 \quad \text{ή} \quad (\Delta E K \Lambda \Theta I) = 2\alpha^2 + 2\beta\gamma = 2(\alpha^2 + \beta\gamma).$$

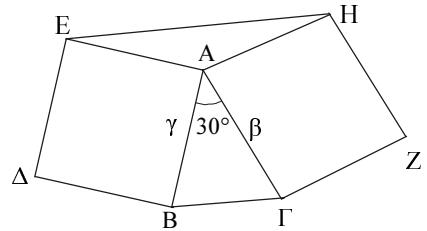
**31. a)**  $B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}H = 180^\circ$ .

$$A\rho\alpha \frac{(EAH)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma\beta}{\gamma\beta} = 1.$$

**β)**  $(B\Gamma Z\Delta) = (AB\Gamma) + (EAH) +$

$$(EAB\Delta) + (AGZH) = \frac{\gamma\beta\eta\mu 30^\circ}{2} +$$

$$\frac{\gamma\beta\eta\mu 150^\circ}{2} + \gamma^2 + \beta^2 = \frac{\gamma\beta}{2} + \gamma^2 + \beta^2$$



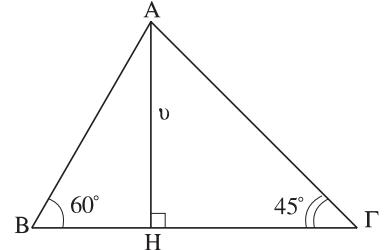
**32. α)** Αφού τρίγωνο  $AH\Gamma$  ισοσκελές, τότε

$$AH = H\Gamma = v \quad (1) \quad \text{και } AG = \sqrt{2} v.$$

Αφού στο τρίγωνο  $ABH$ ,  $B\hat{A}H = 30^\circ$ ,

$$\text{τότε } AB = \frac{2v}{\sqrt{3}} = \frac{2v\sqrt{3}}{3} \text{ και}$$

$$BH = \frac{AB}{2} = \frac{v\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$



$$\text{Από (1), (2) έχουμε: } BG = BH + HG = v \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right)$$

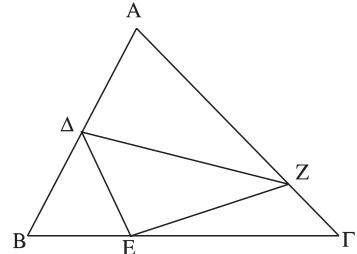
$$\beta) E = v^2 \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right)$$

$$\gamma) E = \frac{v_1 \cdot AB}{2}, \dots, v_1 = v \left( \frac{3 + 3\sqrt{3}}{6} \right) \quad E = \frac{v_2 \cdot AG}{2}, \dots, v_2 = v \left( \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} \right)$$

**33.** α) Τα τρίγωνα  $\Delta BE$  και  $\Delta ABG$  έχουν κοινή την γωνία  $B$ .

$$\text{Άρα } \frac{(\Delta BE)}{(\Delta ABG)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{AB \cdot BG}, \text{ όμως } BE = \frac{1}{3} BG$$

$$\text{και } B\Delta = \frac{1}{2} AB.$$



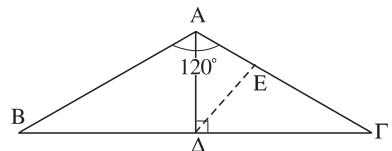
$$\text{Άρα } \frac{(\Delta BE)}{(\Delta ABG)} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{BG}{3}}{AB \cdot BG} = \frac{1}{6}, \text{ άρα } (\Delta BE) = \frac{(ABG)}{6} = \frac{E}{6}.$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } (ZGE) = \frac{(ABG)}{6} = \frac{E}{6} \text{ και } (A\Delta Z) = \frac{3(ABG)}{8} = \frac{3E}{8}.$$

$$\beta) (\Delta EZ) = (ABG) - (B\Delta E) - (A\Delta Z) - (ZEG) = E - \frac{E}{6} - \frac{3E}{8} - \frac{E}{6} = \frac{7E}{24}$$

**34.** α)  $(ABG) = AB \cdot AG \cdot \eta \mu 120^\circ = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

β) Τα τρίγωνα  $\Delta EG$  και  $\Delta ABG$  έχουν κοινή την γωνία  $G$ .



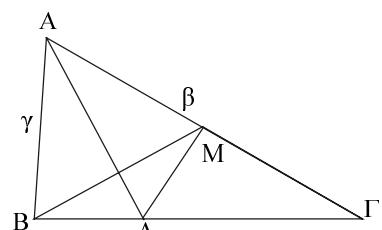
$$\text{Άρα } \frac{(\Delta GE)}{(\Delta ABG)} = \frac{\Delta G \cdot EG}{AG \cdot BG} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3}}{AG \cdot BG} = \frac{2}{6}$$

$$\text{Απ' όπου } (\Delta EG) = \frac{2(ABG)}{6} = \frac{2 \cdot 18\sqrt{3}}{6} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

**35.** α) Τα τρίγωνα  $\Delta M\Delta$  και  $\Delta MG$  έχουν κοινό ύψος, έστω  $v$ , από την κορυφή  $M$ . Έτσι:

$$\frac{(\Delta M\Delta)}{(\Delta MG)} = \frac{v \cdot B\Delta}{v \cdot \Delta G} = \frac{B\Delta}{\Delta G}.$$

$$\text{Όμως } \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2} = \frac{B\Delta}{\Delta G} \quad (1)$$



(θεώρημα διχοτόμων στο  $ABG$ , με  $A\Delta$  διχοτόμο της γωνίας  $A$ )

$$\text{Άρα } \frac{(\Delta M\Delta)}{(\Delta MG)} = \frac{1}{2}$$

$$\beta) \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{M\Gamma \cdot \Delta\Gamma}{A\Gamma \cdot B\Gamma} \quad (2)$$

Όμως από την (1) έχουμε:

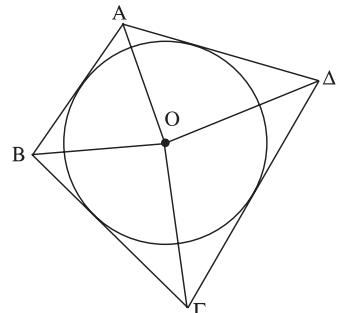
$$\frac{B\Delta + \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{1+2}{2}, \dots, \Delta\Gamma = \frac{2B\Gamma}{3} \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, από τις (2), (3) έχουμε: } \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{M\Gamma}{2} \cdot \frac{2B\Gamma}{3}}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \dots = \frac{1}{3}$$

36.  $(OAB) = \frac{AB \cdot \rho}{2}$  ( $\rho$  ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου)

$$(OG\Delta) = \frac{\Gamma\Delta \cdot \rho}{2}, \quad (OA\Delta) = \frac{A\Delta \cdot \rho}{2},$$

$$(OB\Gamma) = \frac{B\Gamma \cdot \rho}{2}$$



$$(OAB) + (OG\Delta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \rho \quad (OA\Delta) + (OB\Gamma) = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \rho \quad (1)$$

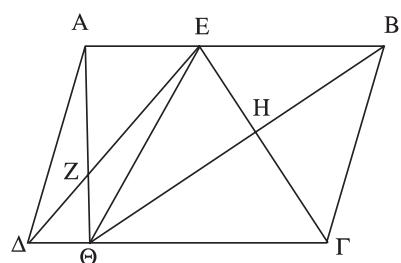
$$\text{Όμως } AB + \Delta\Gamma = A\Delta + B\Gamma \quad (2)$$

$$\text{Άρα, από (1) και (2) έχουμε } (OAB) + (OG\Delta) = (OA\Delta) + (OB\Gamma)$$

**Σημείωση:** Η απόδειξη της (2) είναι απλή λόγω της ισότητας των εφαπτόμενων προς τον κύκλο από σημείο εκτός αυτού.

37. α)  $(EZ\Theta) = (A\Theta E) - (AZE) \quad (1)$  και  
 $(AZ\Delta) = (A\Delta E) - (AZE) \quad (2)$

Όμως  $(A\Theta E) = (A\Delta E)$ , διότι έχουν κοινή βάση την  $AE$  και ίσα ύψη από τις κορυφές  $\Delta$  και  $\Theta$  την απόσταση των παραλλήλων  $AB$  και  $\Delta\Gamma$ . Άρα, από (1), (2) έχουμε  $(EZ\Theta) = (AZ\Delta)$



$$\beta) (EZ\Theta H) = (EZ\Theta) + (E\Theta H) \quad (3)$$

$$\text{Όμως στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι } (EZ\Theta) = (AZ\Delta) \quad (4)$$

$$\text{και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι } (E\Theta H) = (HB\Gamma) \quad (5)$$

$$\text{Άρα η (3) λόγω των (4), (5) γίνεται: } (EH\Theta Z) = (AZ\Delta) + (HB\Gamma)$$

**38. α)** Το  $AZE\Delta$  είναι τραπέζιο (γενικά). Άρα:

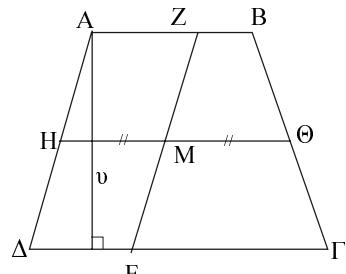
$$HM = \frac{AZ + \Delta E}{2}.$$

$$\text{Άρα } (AZE\Delta) = \frac{AZ + \Delta E}{2} v = HM \cdot v \quad (1)$$

$$\beta) \text{ Όμοια με το ερώτημα (α) αποδεικνύεται ότι } (ZB\Gamma E) = M\Theta \cdot v \quad (2)$$

$$\text{Όμως } M\Theta = HM \quad (3)$$

$$\text{Άρα από τις (1), (2), (3) έχουμε: } (AZE\Delta) = (ZB\Gamma E)$$



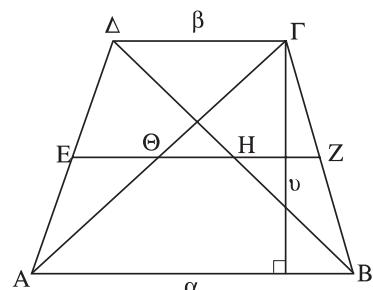
**39. α)**  $(AH\Gamma) = (A\Theta H) + (\Theta H\Gamma)$ .

Όμως τα τρίγωνα  $A\Theta H$  και  $\Theta H\Gamma$  έχουν

$$\text{κοινή βάση τους } \Theta H = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ και ίσα}$$

$$\text{ύψη } \frac{v}{2}, \text{ άρα } (AH\Gamma) = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{2} +$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\alpha - \beta)}{4} v$$



$$\beta) (ABZE) = \frac{EZ + \alpha}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{\frac{3\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{4} \cdot \frac{v}{2} \text{ ή}$$

$$(ABZE) = \frac{3\alpha + \beta}{8} v. \text{ Όμοια } (EZ\Gamma\Delta) = \frac{3\beta + \alpha}{8} v.$$

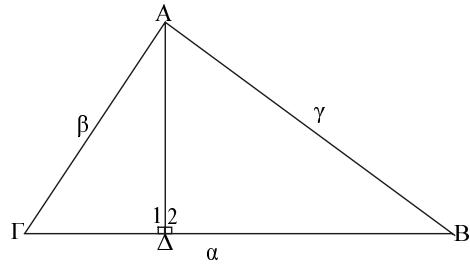
$$\text{Άρα } (ABZE) - (EZ\Gamma\Delta) = \frac{\alpha - \beta}{4} v = (AH\Gamma)$$

40. α)  $17^2 = 8^2 + 15^2$ , άρα  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Άρα  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$ .

β) Τα τρίγωνα  $(AB\Delta)$ ,  $(AG\Delta)$  είναι όμοια.

$$\text{Άρα: } \frac{(AB\Delta)}{(AG\Delta)} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$$

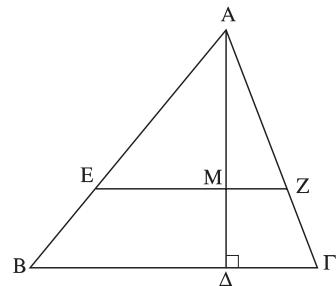


41. Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια. Άρα

$$\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{AM}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Αφού  $(AB\Gamma) = 90 \text{ cm}^2$ , τότε

$$(AEZ) = \frac{4 \cdot 90}{9} = 40 \text{ cm}^2$$

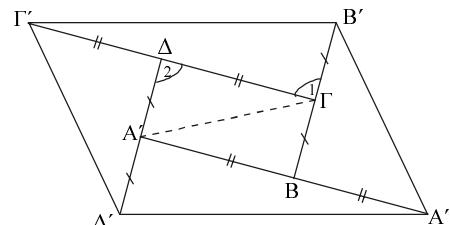


42. α) Τα τρίγωνα  $\Gamma'\Delta\Delta'$  και  $BB'A'$  είναι ίσα διότι έχουν:

i)  $BB' = \Delta\Delta'$  ii)  $\Gamma'\Delta = BA'$

iii)  $\hat{\Delta} = \hat{B}$

Άρα  $\Gamma'\Delta\Delta' = B'B'A'$ .



Όμοια  $\Gamma'B' = \Delta'A'$ , άρα το  $\Gamma'B'A'\Delta'$  είναι παραλληλόγραμμο.

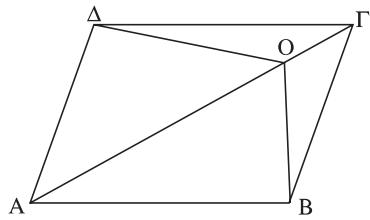
$$\beta) \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1, \text{άρα } \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 \text{ έχουμε } \frac{(\Gamma'\Gamma B')}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\Gamma B' \cdot \Gamma\Gamma}{A\Delta \cdot \Delta\Gamma} = \frac{2\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$$

$$\text{Άρα: } (\Gamma'\Gamma B') = 2(A\Delta\Gamma) = 2 \cdot \frac{E}{2} = E$$

Όμοια:  $(\Gamma'\Delta\Delta') = E$ . Έτσι έχουμε:

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = (AB\Gamma\Delta) + 2(\Gamma'\Delta\Delta') + 2(\Gamma'\Gamma B') = E + 2E + 2E = 5E$$

- 43.** Τα τρίγωνα  $A\Delta O$ ,  $AOB$  έχουν κοινή βάση  $OA$  και ίσα ύψη υ από τις κορυφές  $\Delta$  και  $B$  (η ισότητα των υψών είναι προφανής λόγω της ισότητας των αντιστοίχων ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται από τα ύψη και τις πλευρές  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ), άρα είναι ισοδύναμα.



- 44.** Είναι τρίγωνα  $AH\Delta = Z\Gamma B$ .

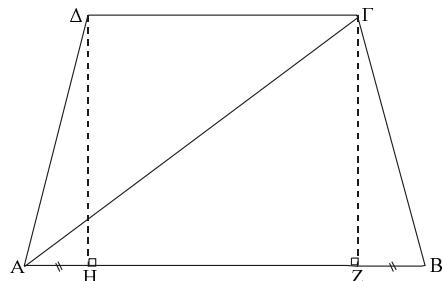
Άρα  $AH = ZB$  και  $\Delta\Gamma = HZ$  (αφού  $\Delta HZ\Gamma$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

$$\text{Άρα } AZ = HZ + AH = \Delta\Gamma + AH \quad (1)$$

$$HB = HZ + ZB = \Delta\Gamma + ZB =$$

$$\Delta\Gamma + AH = AZ \quad (2)$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} v = \frac{\Delta\Gamma + AH + HB}{2} v = \frac{\Delta\Gamma + AH}{2} v + \frac{HB}{2} v \stackrel{(1)}{=} \frac{AZ}{2} v + \frac{HB}{2} v \stackrel{(2)}{=} \frac{AZ}{2} v + \frac{AZ}{2} v = 2(A\Gamma Z)$$



- 45.**  $2\alpha + v + V = 60 \quad (1)$

$$\frac{v+V}{2} 8 = 160 \quad (2)$$

Από την (1) λόγω της (2) έχουμε

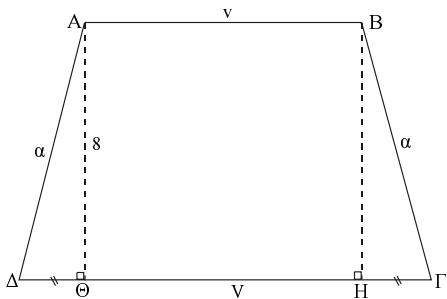
$$2\alpha = 20, \text{ άρα } \alpha = 10 \text{ m.}$$

Στο  $\overset{\Delta}{BHG}$  έχουμε

$$\alpha^2 = BH^2 + HG^2, \dots, HG = 6 \text{ m}$$

$$\text{Όμως } \Delta\Theta = HG, \text{ άρα } 2v + 2HG = 60 - 2\alpha = 40, \dots, v = 14 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } V = 14 + 2 \cdot 6 = 26 \text{ m.}$$

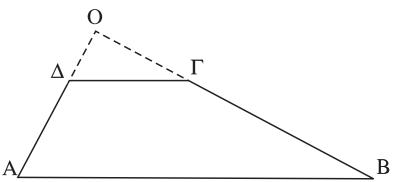


**46.** Αφού  $O\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma \approx O\overset{\Delta}{A}B$

$$\alpha) \frac{O\Delta}{OA} = \frac{O\Gamma}{OB} = \frac{\Delta\Gamma}{AB} \text{ ή}$$

$$\frac{O\Delta}{OA - O\Delta} = \frac{O\Gamma}{OB - O\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{AB - \Delta\Gamma} \text{ ή}$$

$$\frac{O\Delta}{\Delta A} = \frac{O\Gamma}{\Gamma B} = \frac{20}{50}, \text{ απ' όπου } O\Delta = 12 \text{ cm, } O\Gamma = 16 \text{ cm.}$$



Αφού  $12^2 + 16^2 = 20^2$ , τότε τρίγωνο  $O\Delta\Gamma$  ορθογώνιο στο  $\hat{O}$ .

$$\beta) (AB\Gamma\Delta) = (OAB) - (O\Delta\Gamma) = \frac{42 \cdot 56}{2} - \frac{12 \cdot 16}{2} = 1080 \text{ cm}^2.$$

**47.** Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει:  $\mu_\alpha = v_\alpha$ , όμως  $v_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Όμοια } \mu_\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \mu_\gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Άρα } \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3 \left( \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3 \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

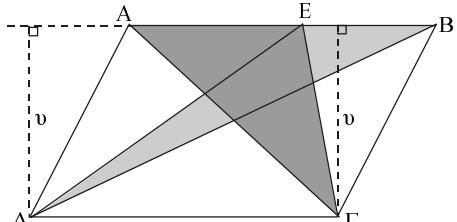
$$\text{Όμως } \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} = E \quad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται:  $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3E\sqrt{3}$ .

$$48. (E\Delta B) = \frac{EB \cdot v}{2} \quad (AE\Gamma) = \frac{EA \cdot v}{2}$$

$$(E\Delta B) + (AE\Gamma) = (EB + EA) \frac{v}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot v}{2} = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$$

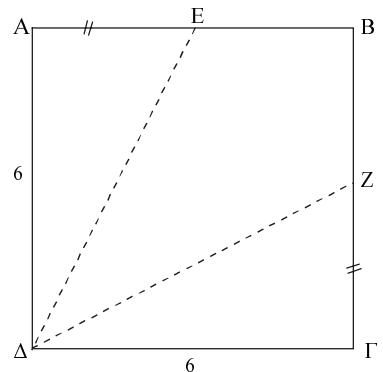


49.  $(AE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{3}$  ή

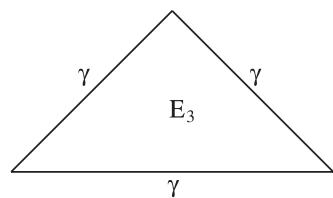
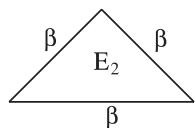
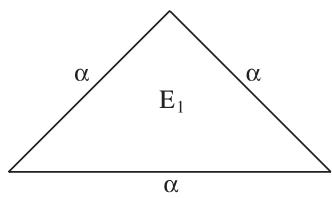
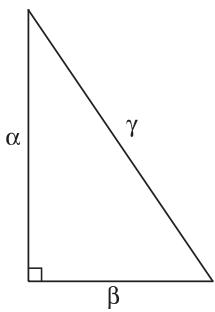
$$\frac{AE \cdot A\Delta}{2} = \frac{6^2}{3}$$
 ή

$$\frac{AE \cdot 6}{2} = 12 \quad \text{ή } AE = 4$$

Όμως βρίσκουμε  $Z\Gamma = 4$ .



50.



$$E_1 = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2}, \quad E_2 = \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{2}, \quad E_3 = \frac{\gamma^2 \sqrt{3}}{2}$$

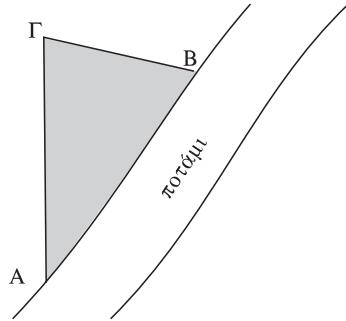
Όμως:  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ , αρα  $E_1 + E_2 = E_3$ .

51. α)  $(\text{ΑΓΒ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} \cdot \eta_{\Gamma}$ . Παρατηρούμε

ότι αν  $\eta_{\Gamma}$  γίνει μέγιστο θα έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό. Άρα αν  $\Gamma = 90^\circ$ , τότε  $\eta_{\Gamma} = 1$  (μέγιστο) και

$$(\text{ΑΓΒ}) = \frac{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}}{2} = 600 \text{ m}^2. \Sigma \text{νεπώς οι}$$

πρόσκοποι πρέπει να σχηματίσουν τρίγωνο με γωνία  $\Gamma = 90^\circ$ .



β)  $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} \cdot \eta_{\Gamma} = \frac{1}{2} 35 \cdot 35 \cdot 1 = 612,5 \text{ m}^2$

$\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ} = 70 \text{ m}$  για να είναι μέγιστο το  $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$  πρέπει  $\text{ΑΓ} = \text{ΓΒ} = 35 \text{ m}$ .

**Σημείωση:** Είναι γνωστό ότι το γινόμενο δύο αριθμών με σταθερό άθροισμα γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί γίνονται ίσοι.

52. α)  $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\alpha + \beta)^2$

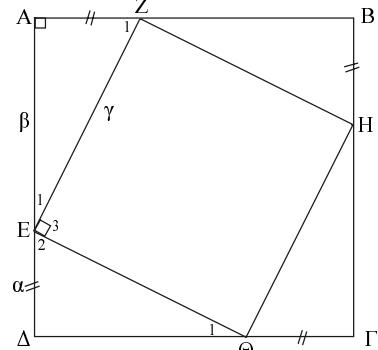
β) Τα τρίγωνα  $\text{ΑΖΕ}, \text{ΕΔΘ}, \text{ΘΓΗ}, \text{ΖΒΗ}$  είναι προφανώς ίσα και ορθογώνια λόγω της κατασκευής τους (βλ. σχήμα).

Άρα  $\text{EZ} = \text{ZH} = \text{HΘ} = \text{ΘE} = \gamma$ .

Όμως:  $\hat{\text{E}}_1 + \hat{\text{Z}}_1 = 90^\circ \quad \hat{\text{E}}_2 + \hat{\Theta}_1 = 90^\circ$

$$\hat{\text{Z}}_1 = \hat{\text{E}}_2 \quad \hat{\text{E}}_1 = \hat{\Theta}_1$$

Άρα  $\hat{\text{E}}_1 + \hat{\text{E}}_2 = 90^\circ$ , άρα  $\hat{\text{E}}_3 = 90^\circ$ .



Άρα το  $\text{EZHH}$  είναι τετράγωνο.

γ) Προφανώς  $\Delta\Theta = \beta = \text{ZB} = \text{HG} = \beta$  (βλ. (β) ερώτημα).

Άρα  $(\text{AZE}) = (\text{EΘΔ}) = (\text{ΘΓΗ}) = (\text{HBZ}) = \frac{\alpha\beta}{2}$

$(\text{EZHH}) = \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

δ)  $(\text{ΑΒΓΔ}) = \gamma^2 + 4 \frac{\alpha\beta}{2}$  αλλά  $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\alpha + \beta)^2$

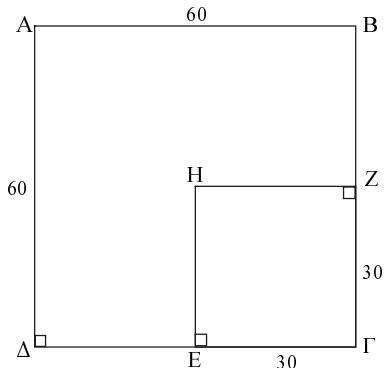
Άρα  $(\alpha + \beta)^2 = \gamma^2 + 2\alpha\beta \wedge \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \gamma^2 + 2\alpha\beta \wedge \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

Πιθανότερο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\text{AEZ}$ .

53. α)  $(HZ\Gamma E) = 900 \text{ m}^2$

β)  $(AB\Gamma\Delta) = 3600 \text{ m}^2$

$$\begin{aligned}\frac{(ABZ\Delta\Theta)}{4} &= \frac{3600 - 900}{4} \\ &= \frac{2700}{4} = 675 \text{ m}^2\end{aligned}$$



γ) Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, τα τέσσερα οικόπεδα (I), (II), (III), (IV) έχουν αντίστοιχα προσόψεις  $x$ ,  $y + \omega$ ,  $z$ ,  $z$  στον εθνικό δρόμο και πρέπει να είναι ισεμβαδικά.

Δηλαδή  $E_I = E_{II} = E_{III} = E_{IV}$ , απ' όπου έχουμε:

$$x \cdot 30 = y \cdot 30 + \omega \cdot 60 = z \cdot 60 = 675$$

$$\text{Απ' όπου: } z = \frac{675}{60} = 11,25 \quad (1)$$

$$x = \frac{675}{30} = 22,5 \quad (2)$$

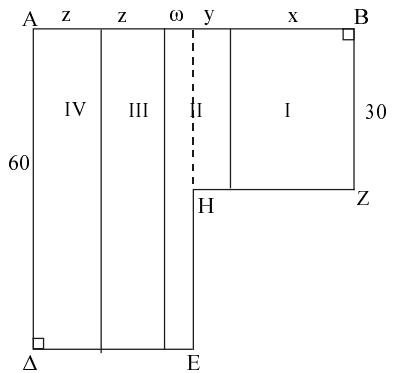
$$y + 2\omega = \frac{675}{30} = 22,5 \quad (3)$$

Αλλά  $2z + \omega + y + x = 60$ , η οποία λόγω των (1), (2) γίνεται:

$$2 \cdot 11,25 + \omega + y + 22,5 = 60 \quad \text{ή} \quad \omega + y = 15 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) έχουμε:  $y = 7,5$  και  $\omega = 7,5$

Άρα η περίμετρος των  $E_I$ ,  $E_{II}$ ,  $E_{III}$ ,  $E_{IV}$  είναι αντίστοιχα 105 m, 150 m, 135 m, 135 m.



54. a)  $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2 = 720.000 \text{ m}^2$

Άρα  $\Delta B \approx 848,5 \text{ m} \approx A\Gamma$

b)  $E = 90.000 \text{ m}^2$

c) Το AZKI είναι ορθογώνιο τραπέζιο,

αφού  $AZ // IA$  και  $\hat{Z} = 90^\circ$ . Επίσης και τα  $ZK\Lambda B$ ,  $\Lambda BEM$ ,  $MEGN$ ,  $PNG\Theta$ ,  $P\Theta D$ ,  $\Delta PSH$ ,  $H\Delta A$ .

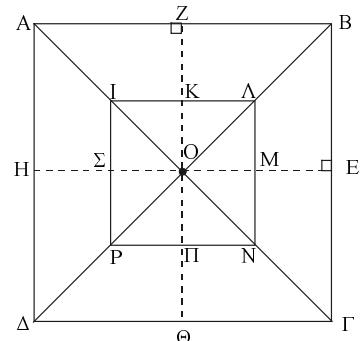
d) i)  $(AZKI) = \frac{AZ + IK}{2} KZ$

Όμως  $KZ = OZ - OK = 300 - 150 = 150 \text{ m}$ .

$$\text{Άρα } (AZKI) = \frac{300 + 150}{2} 150 = 33750 \text{ m}^2$$

ii)  $AI = \frac{A\Gamma}{4} \approx 212,1$ .

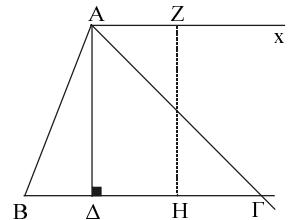
Άρα η περιμετρος  $\Pi \approx AZ + ZK + IK + AI = 300 + 150 + 150 + 212,1 = 812,1 \text{ m}$ .



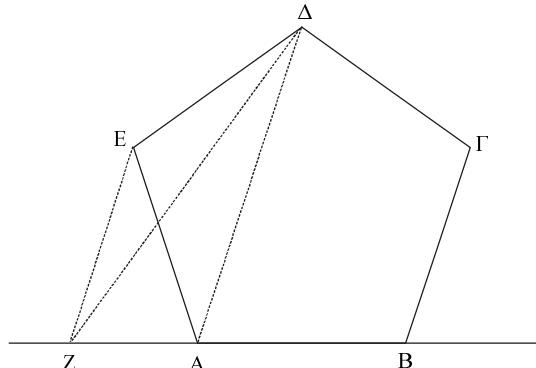
55. Φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$  και από το A ευθεία παράλληλη προς την  $B\Gamma$ , την  $Ax$ . Παίρνουμε τμήμα

$$AZ \text{ πάνω στην } Ax \text{ ώστε } AZ = \frac{B\Gamma}{2}.$$

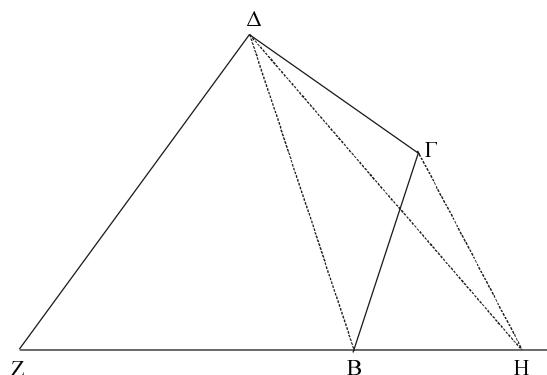
Το ζητούμενο ορθογώνιο έχει πλευρές  $A\Delta$ ,  $AZ$ .



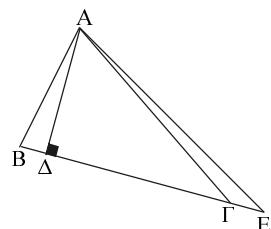
**56. Α' φάση:** Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την  $\Delta A$ , την  $EZ$ . Το πεντάγωνο  $AB\Gamma\Delta E$  μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο τετράπλευρο, το  $ZB\Gamma\Delta Z$ .



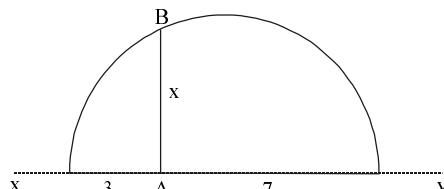
**Β' φάση:** Φέρνουμε τη διαγώνιο  $\Delta B$  και από το  $\Gamma$  την  $GH \parallel \Delta B$ . Το  $Z\Delta H$  είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο  $Z\Delta\Gamma B$ .



**57.** Φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$ . Πάνω στην προέκταση της  $B\Gamma$  παίρνουμε  $GE = BD$ . Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι το ισοδύναμο ορθογώνιο.



**58.** Εάν  $x$  είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε  $x^2 = 3 \cdot 7$ . Κατασκευάζουμε το  $x$  ως μέση ανάλογο των 3 και 7. Σε ευθεία  $xy$  παίρνουμε διαδοχικά



τα τμήματα 3, 7. Με διάμετρο το 10 γράφουμε ημικύκλιο και στο σημείο A υψώνουμε κάθετο. Το μήκος του  $AB$  είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου.